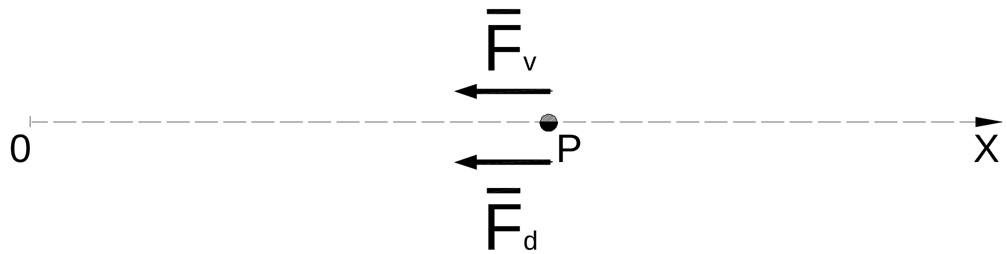
Oefening 3



$$\overline{F}_v = -40x\overline{1}_x \qquad ; \overline{F}_d = -20\dot{x}\overline{1}_x$$

$$m = 5g$$

$$t = 0: \qquad x_0 = 20 \qquad \text{en} \qquad \dot{x}_0 = 0$$

a) bewegingsvergelijking:

$$5\ddot{x} = -40x - 20\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$$

b) homogene differentiaal vegelijking met constante coëfficiënten van tweede orde:
karakteristieke vergelijking:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

$$D = 16 - 32 = -16 < 0$$

$$\Rightarrow \qquad \text{complexewortels}: \qquad \lambda = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$$

oplossing wordt:

$$x = Ae^{(-2+2i)t} + Be^{(-2-2i)t}$$

$$= e^{-2t}(A'\cos 2t + B'\sin 2t)$$

$$\dot{x} = -2e^{-2t}(A'\cos 2t + B'\sin 2t) + e^{-2t}(-2A'\sin 2t + 2B'\cos 2t)$$

begingcondities gebruiken:

$$x(t=0) = A' = 20 \qquad \Rightarrow \qquad A' = 20$$
$$\dot{x}(t=0) = -2A' + 2B' = 0 \quad \Rightarrow \qquad B' = 20$$

de oplossing wordt:

$$\begin{aligned} x &= e^{-2t}(20\cos 2t + 20\sin 2t) \\ &= 20\sqrt{2}e^{-2t}\sin(2t + \text{bgtg}1) \\ &= 20\sqrt{2}e^{-2t}\sin(2t + \frac{\pi}{4}) \\ &= 20\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

c) amplitude: $20\sqrt{2}e^{-2t}$ **cm**

pseudo_periode: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ **sec**

pseudo_frequentie: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}$ **hertz**

d) zie tekening

e) logaritmisch decrement $\gamma = \ln\frac{x_{max,i}}{x_{max,i+1}}$

maximum?

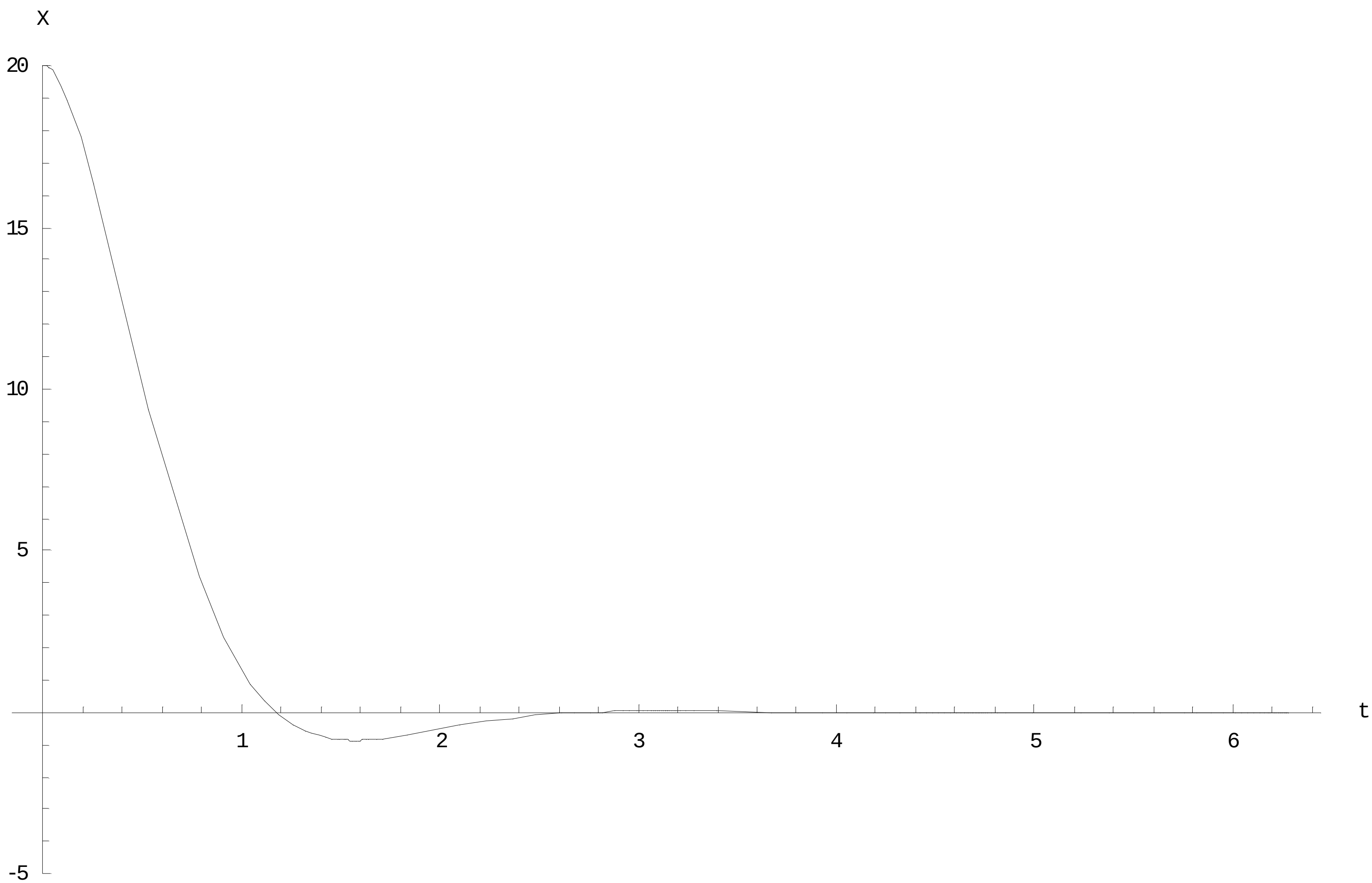
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2e^{-2t}(20\cos 2t + 20\sin 2t) + e^{-2t}(-40\sin 2t + 40\cos 2t) \\ &= -80e^{-2t}\sin 2t \end{aligned}$$

extrema: $\dot{x} = 0 \Rightarrow -80e^{-2t}\sin 2t = 0$

$$t = 0 \quad ;\pi \quad ;2\pi \quad \text{maxima}$$
$$t = \frac{\pi}{2} \quad ;\frac{3\pi}{2} \quad ;\frac{5\pi}{2} \quad \text{minima}$$

dus: $\gamma = \ln\frac{x(t=0)}{x(t=\pi)} = \ln\frac{20}{20e^{-2\pi}} = 2\pi$

of met formule uit cursus: $$\gamma = \frac{\pi \overbrace{\lambda}^{\text{demping}}}{\underbrace{m}_{\text{massa}} \underbrace{\omega}_{\text{pulsatie}}} = \frac{\pi.20}{5.2} = 2\pi$$


X
20
15
10
5
-5
t
1
2
3
4
5
6

Oefening 7:

bewegingsvergelijking:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 20\cos 2t$$

homogeen deel:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0 \qquad \text{(analoog als oefening 3)}$$

$$\Rightarrow \qquad x_h = e^{-2t}(A'\cos 2t + B'\sin 2t)$$

particulier deel:

voorstel voor een particuliere oplossing:

$$x_P = C\cos 2t + D\sin 2t$$
$$\Rightarrow \qquad \dot{x}_P = -2C\sin 2t + 2D\cos 2t$$
$$\Rightarrow \qquad \ddot{x}_P = -4C\cos 2t - 4D\sin 2t$$

invullen in de differentiaal vergelijking:

$$-4C\cos 2t - 4D\sin 2t - 8C\sin 2t + 8D\cos 2t + 8C\cos 2t + 8D\sin 2t = 20\cos 2t$$

identificatie van de coëfficiënten van cos en sin:

$$\begin{cases} -4C + 8D + 8C = 20 \\ -4D - 8C + 8D = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

volledige oplossing:

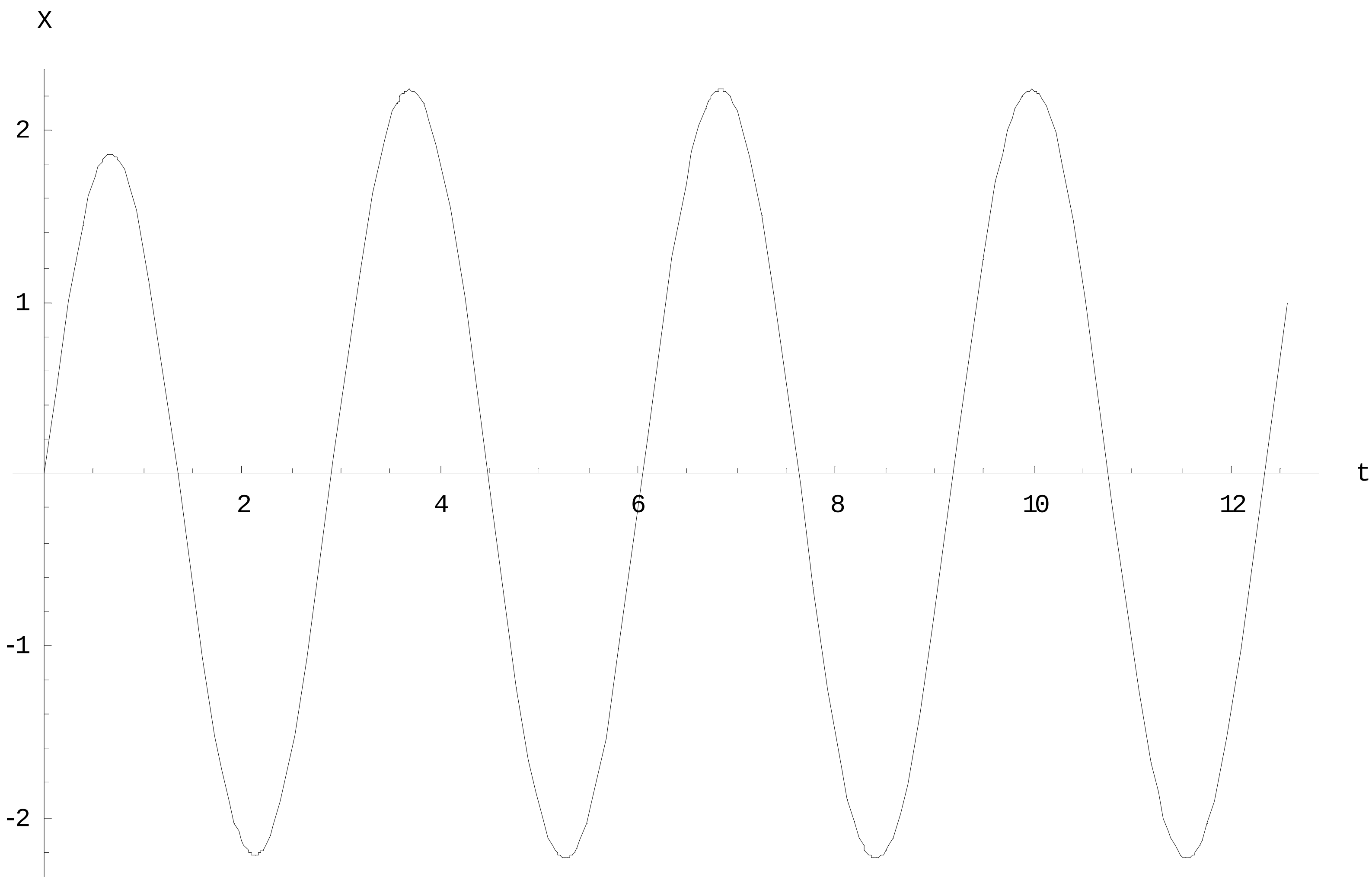
$$x = x_P + x_h$$
$$= (\cos 2t + 2\sin 2t) + e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$$
$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = 2(-\sin 2t + 2\cos 2t) - 2e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) + e^{-2t}(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t)$$

beginvoorwaarden:

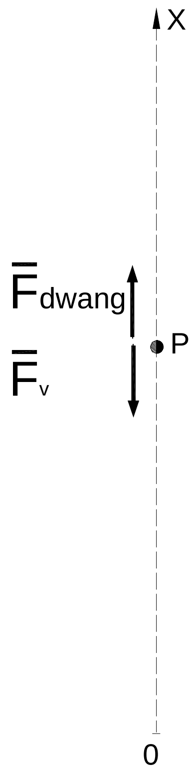
$$\mathbf{x(t=0) = 1 + A = 0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A = -1}$$
$$\mathbf{\dot{x}(t=0) = 4 - 2A + 2B = 0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B = -3}$$

dus:

$$\mathbf{x = (\cos 2t + 2\sin 2t) - e^{-2t}(\cos 2t + 3\sin 2t)}$$
$$\mathbf{\dot{x} = -2\sin 2t + 4\cos 2t + 4e^{-2t}(2\sin 2t - \cos 2t)}$$


X
2
1
-1
-2
2
4
6
8
10
12
t

<u>Oefening 5:</u>



$$\overline{\mathbf{F}}_v = -32x\overline{1}_x \qquad ; \overline{\mathbf{F}}_{dwang} = 128\sin 4t\,\overline{1}_x$$

$$m = 2g$$

$$t = 0: \qquad x_0 = 0 \qquad \text{en } \dot{x}_0 = 0$$

homogene deel:

$$2\ddot{x} + 32x = 0$$

karakteristieke vergelijking:

$$2\lambda^2 + 32 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm 4i$$

$$\Rightarrow \qquad x_h = A\cos 4t + B\sin 4t$$

particulier deel:

voorstel voor een particuliere oplossing:

$$x_P = C\cos 4t + D\sin 4t$$
$$\dot{x}_P = -4C\sin 4t + 4D\cos 4t$$
$$\ddot{x}_P = -16C\cos 4t - 16D\sin 4t$$

Invullen in differentiaal vergelijking:

$$-32C\cos 4t - 32D\sin 4t + 32C\cos 4t + 32D\sin 4t = 128\sin 4t$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 128\sin 4t$$

Men kan hier geen identificatie van de coëfficiënten meer uitvoeren en wel omdat de frequentie van de dwang overeenkomt met de eigenfrequentie van het massa-veer systeem. Men zal een ander voorstel moeten doen voor de particuliere oplossing:

$$x_P = Ct\cos 4t$$
$$\dot{x}_P = C\cos 4t - 4Ct\sin 4t$$
$$\ddot{x}_P = -4C\sin 4t - 4C\sin 4t - 16Ct\cos 4t$$

invullen in de differentiaal vergelijking:

$$-8C\sin 4t - 8C\sin 4t - 32Ct\cos 4t + 32Ct\cos 4t = 128\sin 4t$$
$$\Rightarrow \quad C = -8$$

de volledige oplossing wordt:

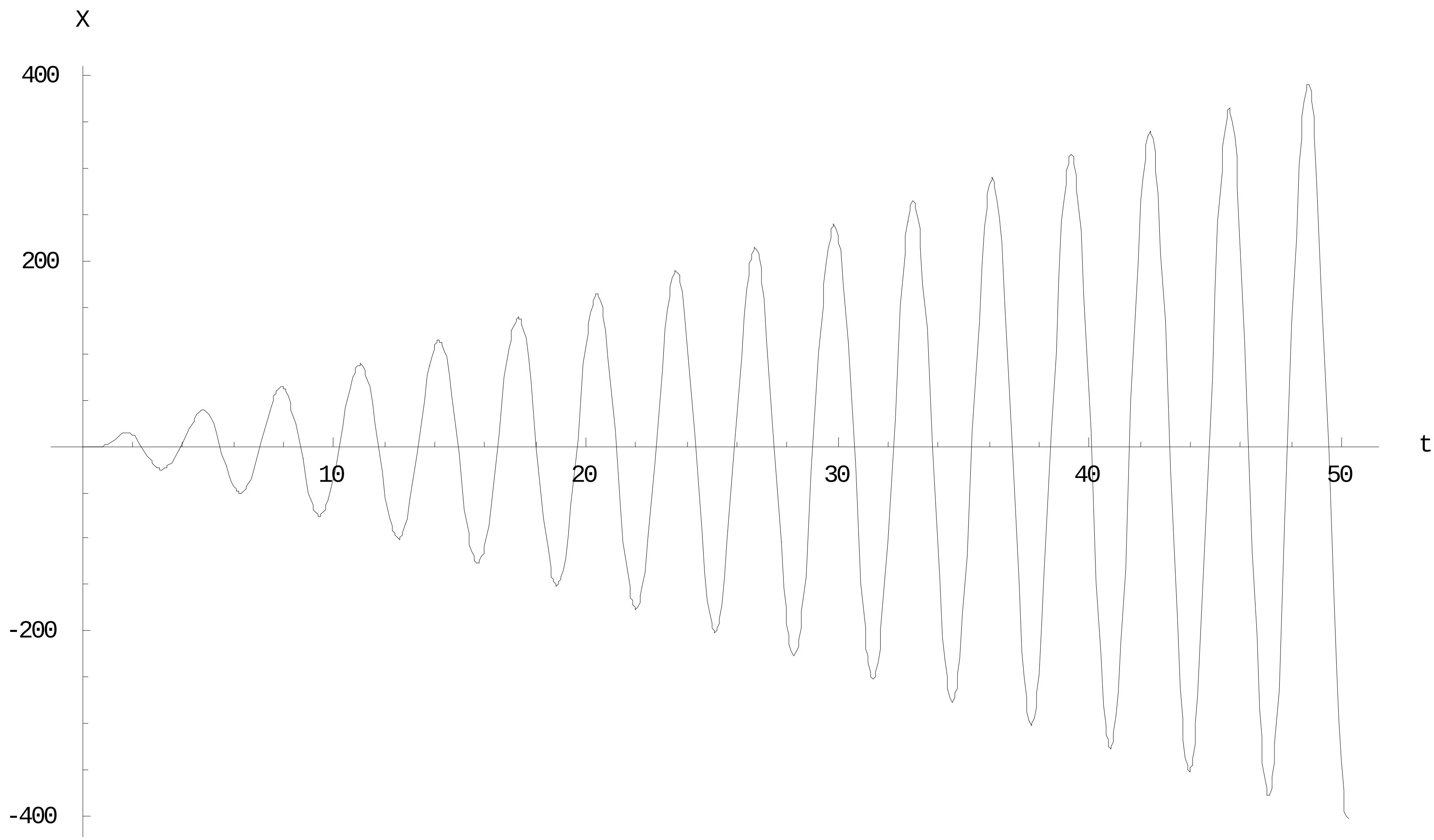
$$x = A\cos 4t + B\sin 4t - 8t\cos 4t$$
$$\dot{x} = -4A\sin 4t + 4B\cos 4t - 8\cos 4t + 32t\sin 4t$$

beginvoorwaarden gebruiken:

$$x(t=0) = A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$
$$\dot{x}(t=0) = 4B - 8 \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

$$\Rightarrow \quad x = 2\sin 4t - 8t\cos 4t$$

als $\mathbf{t} \Rightarrow \infty$ dan zal x exploderen, dit fenomeen noemt men resonantie!


X
400
200
-200
-400
t
10
20
30
40
50